Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Μάθημα 24

26/05/16 ①

"Επαναληπτικές Ασκήσεις"

Σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-\lambda}$$

$a_{k+1} = \lambda a_k \ \forall k, \ |\lambda| < 1$

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{4^k} = \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{3}$

γεωμετρική

με λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$

και πρώτο όρο $a_1 = \frac{5}{4}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{2^k} = \frac{4}{1-1/2} = 8$

γεωμετρική

με λόγο $\lambda = 1/2$

και πρώτο όρο $a_1 = 4$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{4}\right)^k + \left(\frac{3}{4}\right)^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 1+3 = 4.$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{8}{\sqrt{3k+5}}$. α) Συγκλίνει; β) Αν ναι, συγκλίνει απόλυτα;

!Tip:!

Εξετάζω πρώτα την απόλυτη σύγκλιση, διότι αν συγκλίνει απόλυτα, συγκλίνει και αλλά.

β) Εξετάζουμε αν συγκλίνει απόλυτα, η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου $b_k = \frac{8}{\sqrt{3k+5}}$.

Θέτουμε $\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$$\frac{b_k}{\gamma_k} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3k+5}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{8}{\sqrt{\frac{3k+5}{k}}} = \frac{8}{\sqrt{3+\frac{5}{k}}} \longrightarrow \frac{8}{\sqrt{3}}$$

Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ αποκλίνει ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$, $1/2 < 1$)

αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

α) Θέτουμε $a_k = \frac{8}{\sqrt{3k+5}}$ και έχουμε $a_k \geq 0 \ \forall k$,

η a_k φθίνουσα (δηλαδή $a_{k+1} \leq a_k \ \forall k$)

και $\lim a_k = 0$. Από κριτήριο Leibnitz,

η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

⑤ $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^k k!}{k^k}$ α) Συγκλίνει; β) Αν ναι, συγκλίνει απόλυτα;

β) Θέτουμε $a_k = \frac{2^k k!}{k^k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{2^k k!}{k^k}} = \frac{2^{k+1}(k+1)!\, k^k}{2^k k!\,(k+1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{2\cancel{(k+1)}\, k^k}{\cancel{(k+1)}(k+1)^k} = \frac{2}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{2}{e} < 1.$$

Αν $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to \lambda$, $|\lambda|<1$ ή αν $\sqrt[k]{|a_k|} \to \lambda$, $|\lambda|<1$, τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει.

Επομένως, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα.

α) Εφόσον, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα, θα συγκλίνει και απλά.

⑥ Να εξεταστεί για ποια $x\in\mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^k}$.

1η περίπτωση: Αν $|x|<1$, τότε $x^k \to 0$ άρα $\frac{1}{1+x^k} \longrightarrow 1 \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

2η περίπτωση: Αν $x=1$, τότε $\frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

3η περίπτωση: Αν $x=-1$, η σειρά δεν ορίζεται αφού για k περιττό $(1+x^k)=(1-1)=0$ και συνεπώς μηδενίζεται ο παρονομαστής.

4η περίπτωση: Αν $|x|>1$.

Γνωρίζουμε ότι αν $\sqrt[k]{|a_k|} \to \lambda$ με $|\lambda|<1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει (απόλυτα).

Αρκεί να βρούμε το όριο $\sqrt[k]{\left|\frac{1}{1+x^k}\right|}$.

$|1+x^k| \le |x|^k + 1 < |x|^k + |x|^k = 2|x|^k$

Επίσης, $|1+x^k| \ge |x|^k - 1$

Εφόσον $|x|>1$, έχουμε $\lim |x|^k = +\infty$, άρα $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x|^k \ge 2$ $\forall k \ge k_0$

Έτσι, $\forall k \ge k_0$:

$\frac{|x|^k}{2} \ge 1 \Rightarrow -1 \ge -\frac{|x|^k}{2}$

και άρα $|1+x^k| \ge |x|^k - 1 \ge |x|^k - 1/2|x|^k = 1/2|x|^k$

Έτσι, $\forall k \ge k_0$:

$1/2|x|^k \le |1+x^k| \le 2|x|^k \Rightarrow$

$\Rightarrow 1/2 \cdot \frac{1}{|x|^k} \leq \left|\frac{1}{1+x^k}\right| \leq \frac{2}{|x|^k} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[k]{2}} \cdot \frac{1}{|x|} \leq \sqrt[k]{\left|\frac{1}{1+x^k}\right|} \leq \sqrt[k]{2} \cdot \frac{1}{|x|}$

Εφόσον $\sqrt[k]{2} \to 1$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών: $\sqrt[k]{\left|\frac{1}{1+x^k}\right|} \to \frac{1}{|x|} < 1$ εφόσον $|x| > 1$.

Από το κριτήριο ρίζας συμπεραίνω πως η σειρά συγκλίνει.

Ομοιόμορφη Συνέχεια: $f: A \to \mathbb{R}$

f ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow \forall (x_n),(y_n)$ στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει: $f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Σχεδόν πάντα, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, βρίσκουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

Πως δείχνουμε ότι μια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής:

α) Συνθήκη Lipschitz : $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall x,y \in A \Rightarrow$ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Αν $f: I \to \mathbb{R}$, I διάστημα, παραγωγίσιμη, $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

γ) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

δ) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε f ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow \exists$ τα $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παραδείγματα:

1) Έστω $a>0$. $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Απόδειξη: α' τρόπος:

$\forall x,y \in [a,+\infty)$

$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}\right| = \frac{|x+y||x-y|}{x^2y^2} = \left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2}\right)|x-y| \leq$

$\leq \frac{2}{a^3}|x-y|$, εφόσον $\left.\begin{matrix} x \geq a \\ y \geq a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2y \geq a^3 \\ xy^2 \geq a^3 \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} \frac{1}{x^2y} \leq 1/a^3 \\ \frac{1}{xy^2} \leq 1/a^3 \end{matrix}$

Η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (με σταθερά $\frac{2}{a^3}$) άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Β' τρόπος:

$f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

Διάστημα

$|f'(x)| = \frac{2}{x^3} \leq \frac{2}{a^3} \quad \forall x \in [a,+\infty)$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Αναζητάμε 2 ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(0,+\infty)$ ώστε:

$x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$.

Θέτουμε: $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ και $y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\Big\} \Rightarrow x_n - y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$

και $f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2} = n-(n+1) \to -1 \neq 0$

Άρα, η f όχι ομοιόμορφα συνεχής.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor τάξης 4 της f γύρω από το $x_0 = 0$.

Απόδειξη:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \sin(x^2)$ (από το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού, αφού η $\sin(t^2)$ είναι συνεχής) και $|f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Αναζητάμε το πολυώνυμο $P(x) = T_{4,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$

$f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$

$f'(x) = \sin(x^2)$

$f''(x) = 2x\cos(x^2)$

$f'''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$

$f^{(4)}(x) = -4x\sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)\cdot(2x)$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(0) = 0$

Άρα, $P(x) = T_{4,f,0}(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 = \frac{x^3}{3}$.

4) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική.
($\exists T>0 \cdot f(x+T) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$)
Να δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη:

Αρχικά, $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(x+kT) = f(x)$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Επειδή η f συνεχής στο $[-T, 2T]$ θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $[-T, 2T]$.

Άρα $\exists \delta > 0$ με $\delta < T$ ώστε:
$\forall x, y \in [-T, 2T]$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (*)

Έστω τυχαία $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$.

Για $k = \left[\frac{x}{T}\right] \in \mathbb{Z}$,
έχουμε $k \leq \frac{x}{T} < k+1 \Rightarrow kT \leq x < (k+1)T$

$kT - T \leq x - \delta < y < x + \delta \leq (kT+T) + T = kT + 2T$

Έτσι, $x - kT \in [0, T] \subseteq [-T, 2T]$
και $y - kT \in [-T, 2T]$

Οπότε: $|x - kT - (y - kT)| = |x - y| < \delta$.

Άρα, από (*) έχουμε ότι $|f(x-kT) - f(y-kT)| < \varepsilon$.

Άρα, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Επομένως, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.